XXXI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2009 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Hay 10 jarras idénticas y cada una contiene leche hasta a lo sumo 10% de su capacidad. La operación permitida consiste en elegir una jarra y distribuir una parte o todo su contenido en partes iguales en las otras 9 jarras. Demostrar que utilizando a lo sumo 10 veces la operación permitida siempre es posible lograr que las 10 jarras tengan todas la misma cantidad de leche.

4 PUNTOS

2. Miguel tiene 1000 cubos idénticos de $1 \times 1 \times 1$. Cada cubo tiene dos caras opuestas coloreadas de rojo, dos caras opuestas coloreadas de azul y dos caras opuestas coloreadas de blanco. Miguel construyó con estos cubos un cubo gigante (de $10 \times 10 \times 10$) de modo que los cubos se tocan en caras del mismo color. Demostrar que el cubo gigante tiene una cara que es toda de un mismo color.

6 PUNTOS

3. Hallar todos los enteros positivos a y b tales que $(a+b^2)(b+a^2)$ es de la forma 2^m para algún entero m.

6 PUNTOS

4. Sea $ABCD$ un rombo. Los puntos P y Q de los lados BC y CD respectivamente son tales que $BP = CQ$. Demostrar que el baricentro del triángulo APQ pertenece al segmento BD.
ACLARACIÓN: El baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan sus medianas.

6 PUNTOS

5. Se tiene un conjunto de N pesas todas de pesos enteros y distintos, desde 1 gramo hasta N gramos. Hay que elegir varias de ellas (más de una) de modo que el peso total de las elegidas sea igual al peso promedio de las no elegidas. Demostrar que
a) Si $N + 1$ es un cuadrado perfecto entonces se puede lograr el objetivo

2 PUNTOS

b) Si se puede lograr el objetivo entonces $N + 1$ es un cuadrado perfecto.

7 PUNTOS

6. Sobre una hoja cuadriculada se colocan 2009 cuadrados idénticos de modo tal que sus lados estén todos contenidos en líneas de la cuadrícula (los cuadrados pueden superponerse total o parcialmente). A continuación se marcan los cuadritos de la cuadrícula que estén cubiertos por una cantidad impar de cuadrados. Demostrar que el número de cuadritos marcados es mayor o igual que el número de cuadritos cubiertos por uno de los 2009 cuadrados.

10 PUNTOS

7. Ana y Beto viajan juntos por un archipiélago de 2009 islas. Algunos pares de islas están conectados por líneas de lanchas de ida y de vuelta. Ana y Beto desarrollan el viaje mediante el siguiente juego. Primero Ana elige la isla en la que inician el recorrido. Luego Beto elige la siguiente isla, y así continúan el viaje, eligiendo por turnos la siguiente isla que visitarán (está prohibido regresar a una isla ya visitada). El jugador que en su turno no puede elegir una isla aun no visitada (porque no hay ninguna isla a la que se pueda llegar en lancha en forma directa partiendo de la isla en la que se encuentran en ese momento) pierde. Demostrar que para cualquier esquema de las líneas de lanchas, Ana logra ganar, no importa lo bien que juegue Beto.

14 PUNTOS

XXXI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO 2009 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. 100 piratas juegan a las cartas. Cuando el juego termina se pagan unos a otros con oro en polvo. Cada pirata tiene suficiente oro para pagar sus deudas. Cada pirata puede pagar una cantidad igual a cada uno de los otros o puede cobrar la misma cantidad a cada uno de los otros. Demostrar que luego de repetir varias veces este procedimiento cada ganador recibe exactamente lo que ha ganado y cada perdedor paga exactamente lo que ha perdido.

4 PUNTOS

2. Un rectángulo (que no es cuadrado) se corta en N pedazos rectangulares (no necesariamente congruentes). Demostrar que siempre se puede cortar cada uno de los pedazos rectangulares en dos piezas de modo que usando las $2N$ piezas se pueda construir un cuadrado y un rectángulo, y cada figura conste de N piezas.

6 PUNTOS

3. Se tiene una esfera que toca (es tangente) a todas las aristas de un tetraedro. Se trazan todas las rectas que pasan por los puntos de tangencia de dos aristas no adyacentes. Demostrar que estas rectas son concurrentes.

7 PUNTOS

4. Sea $[n]!$ el producto $1\cdot 11\cdot 111\cdot\ldots\cdot\underbrace{11...11}_{n\,\text{unos}}$ (n factores en total). Demostrar que $[n+m]!$ es divisible por $[n]!\cdot[m]!$.

9 PUNTOS

5. Sean XYZ y $ABCDEF$ un triángulo y un hexágono convexo tales que AB, CD y EF son paralelos e iguales a XY, YZ y ZX, respectivamente. Demostrar que el área del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de BC, DE y FA es mayor o igual que el área del triángulo XYZ.

9 PUNTOS

6. Ana y Beto viajan juntos por un archipiélago de 2009 islas. Algunos pares de islas están conectados por líneas de lanchas de ida y de vuelta. Ana y Beto desarrollan el viaje mediante el siguiente juego. Primero Ana elige la isla en la que inician el recorrido. Luego Beto elige la siguiente isla, y así continúan el viaje, eligiendo por turnos la siguiente isla que visitarán (está prohibido regresar a una isla ya visitada). El jugador que en su turno no puede elegir una isla aun no visitada (porque no hay ninguna isla a la que se pueda llegar en lancha en forma directa partiendo de la isla en la que se encuentran en ese momento) pierde. Demostrar que para cualquier esquema de las líneas de lanchas, Ana logra ganar, no importa lo bien que juegue Beto.

12 PUNTOS

7. Delante de la cueva de Alí Babá hay un dispositivo para abrir la puerta: es una calesita con forma de polígono regular de N lados, que tiene N cofres iguales cerrados ubicados uno en cada vértice. En cada cofre hay una moneda que puede estar cara o ceca. La cueva se abre sólo si todas las monedas tienen la misma posición.
El genio que controla la entrada ofrece al visitante que elija un conjunto de cofres (entre 1 y N) y da vuelta las monedas de esos cofres. A continuación, si la cueva no se abre, el genio cierra los cofres y gira velozmente la calesita de modo que resulta imposible saber cuales son los cofres que se acaban de modificar. Cuando la calesita se detiene, el genio ofrece al visitante una nueva oportunidad, y así siguiendo. Hallar los valores de N tales que mediante una secuencia de intentos el visitante logra con certeza que la cueva se abra.

14 PUNTOS